

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ В РЕЗОНАТОРЕ

Аннотация. Рассмотрена задача дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом теле, расположенном в прямоугольном резонаторе. Задача сведена к объемному сингулярному интегральному уравнению на теле. Рассмотрен численный метод коллокации для решения этого уравнения. Представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации.

Ключевые слова: краевая задача, электромагнитная задача дифракции, интегральное уравнение, численный метод.

Abstract. The article examines a problem of electromagnetic field diffraction on a dielectric body located in a rectangular resonator. The problem is reduced to volume singular integral equation on the body. The author has considered a numerical collocation method for solving the equation and presented the formulas of matrix coefficients for the collocation method.

Key words: boundary value problem, electromagnetic scattering, integral equations, numerical method.

Введение

В статье рассматривается задача дифракции стороннего электромагнитного поля на локально неоднородном теле, помещенном в прямоугольный резонатор с идеально проводящими стенками. Это актуальная задача электродинамики. В связи с неоднородной структурой и сложной геометрией тела распределение электромагнитного поля внутри него сложно измерить экспериментально. Особенно острой является проблема определения электродинамического поля на сложной системе поверхностей и тел в резонансном диапазоне частот, возникающая при определении параметров нанокompозитных материалов и наноструктур. Это приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать задачу численно с помощью компьютеров. При этом приходится решать трехмерные векторные задачи в полной электродинамической постановке. Для численного решения задачи возможно использование метода конечных элементов. Однако применение метода конечных элементов связано с большой вычислительной емкостью поставленной задачи. Для получения приемлемых результатов приходится строить достаточно мелкую сетку как внутри тела, так и за его пределами. Поэтому поставленная задача с трудом решается даже на самых современных суперкомпьютерах. Применение при решении дорогостоящих пакетов прикладных программ (Ansis, Quikwave и т.д.) также не дает удовлетворительных по точности результатов. От этих недостатков свободен метод объемных сингулярных интегральных уравнений. Здесь интегральное уравнение решается только внутри тела. Исследованием данной задачи занимался ряд авторов (А. Б. Самохин, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак [1–3]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c\}$ – резонатор с идеально

проводящей поверхностью ∂P . В резонаторе расположено объемное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) -тензорной функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области $\bar{Q}$, обратный тензор $\hat{\varepsilon}^{-1}(x)$ существует в $\bar{Q}$, и его компоненты также ограничены в $\bar{Q}$ [3].

Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок резонатора, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. Вне $\bar{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными $\varepsilon_0(>0)$, $\mu_0(>0)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\vec{E}, \vec{H} \in L_{2,loc}(P)$ (и, следовательно, $\vec{E}, \vec{H} \in L_2(Q)$), возбуждаемое в резонаторе сторонним полем с временной зависимостью вида $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота. Источник стороннего поля – электрический ток $\vec{j}_E^0 \in L_{2,loc}(P)$ с компактным носителем в волноводе P .

В области $P \subset \mathbf{R}^3$ стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \hat{\varepsilon} \vec{E} + \vec{j}_E^0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega \mu_0 \vec{H}, \quad x \in P. \end{aligned} \quad (1)$$

Для $\vec{E}, \vec{H}$ должны выполняться краевые условия на стенках волновода:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau|_{\partial P} &= 0; \\ \vec{H}_\tau|_{\partial P} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из соотношений (1)–(4) для поля $\vec{E}$ следует интегродифференциальное уравнение [3]

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \vec{E}_0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E}(y) dy + \\ &+ \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, представление $E(x)$ в области $P \setminus Q$ имеет вид

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E}(y) dy +$$

$$+\operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E}(y) dy, x \in P \setminus Q.$$

Поле H выражается следующим образом:

$$H(x) = H^0(x) - i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \int_Q \hat{G}_E \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \vec{E}(y) dy, x \in P,$$

где $\hat{I}$ – единичный тензор.

Компоненты диагонального тензора Грина $\hat{G}_E = \operatorname{diag}(G_E^1, G_E^2, G_E^3)$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (1 + \delta_{0n})}{a \cdot b \cdot \gamma_{nm} \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \times \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \cdot \begin{cases} \operatorname{sh}(\gamma_{nm} x_3) \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} (c - y_3)), & x_3 < y_3, \\ \operatorname{sh}(\gamma_{nm} y_3) \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} (c - x_3)), & x_3 > y_3; \end{cases} \\ G_E^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \cdot (1 + \delta_{0m})}{a \cdot b \cdot \gamma_{nm} \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \cdot \begin{cases} \operatorname{sh}(\gamma_{nm} x_3) \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} (c - y_3)), & x_3 < y_3, \\ \operatorname{sh}(\gamma_{nm} y_3) \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} (c - x_3)), & x_3 > y_3; \end{cases} \\ G_E^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{a \cdot b \cdot \gamma_{nm} \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \times \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \cdot \begin{cases} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} x_3) \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (c - y_3)), & x_3 < y_3, \\ \operatorname{ch}(\gamma_{nm} y_3) \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (c - x_3)), & x_3 > y_3. \end{cases} \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2},$$

при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\operatorname{Im} \gamma_{nm} \geq 0$.

Для применения численного метода [4, 5] проинтегрируем компоненты тензора Грина по параллелепипеду:

$$\Pi_{i_1 i_2 i_3} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : i_1 \leq \frac{x_1}{h_1} \leq i_1 + 1, i_2 \leq \frac{x_2}{h_2} \leq i_2 + 1, i_3 \leq \frac{x_3}{h_3} \leq i_3 + 1 \right\},$$

обозначим их через G_I^1, G_I^2, G_I^3 , тогда

$$\begin{aligned}
G_I^1 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{n \cdot m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \cos(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\
&\times \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right) \cdot \cos(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) + \\
&+ \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{0m}^0(x_3)}{m \cdot \gamma_{0m}^2} \cdot \sin(mX_2) \cdot \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right); \\
G_I^2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{n \cdot m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \cos(mX_2) \times \\
&\times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right) \cdot \cos(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right) + \\
&+ \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n0}^0(x_3)}{n \cdot \gamma_{n0}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right); \\
G_I^3 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^1(x_3)}{n \cdot m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\
&\times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(n\frac{H_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(m\frac{H_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$f_{nm}^0(x_3) = \begin{cases} \frac{-2 \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm}x_3) \cdot \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm}\left(c - i_3h_3 - \frac{h_3}{2}\right)\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm}\frac{h_3}{2}\right)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)}, & \text{если } x_3 < i_3h_3; \\ \frac{2 \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm}(c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{nm}(x_3 + i_3h_3)}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{nm}(x_3 - i_3h_3)}{2}\right) - \\ - \frac{2 \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{nm}x_3)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm}\left(c - \frac{i_3h_3 + h_3 + x_3}{2}\right)\right) \times \\ \times \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm}\frac{(x_3 - i_3h_3 - h_3)}{2}\right), & \text{если } h_3i_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3; \\ \frac{2 \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot (c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm} \cdot \left(i_3h_3 + \frac{h_3}{2}\right)\right) \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm}\frac{h_3}{2}\right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1) \cdot h_3, \end{cases}$$

$$f_{10m}^0(x_3) = 4 \cdot f_{0m}^0(x_3),$$

$$f_{2n0}^0(x_3) = 4 \cdot f_{n0}^0(x_3),$$

$$f_{nm}^1(x_3) = \begin{cases} \frac{-4 \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{nm} x_3)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \cdot \operatorname{sh}\left(-\gamma_{nm} \frac{h_3}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_{nm} \left(c - i_3 h_3 - \frac{h_3}{2}\right)\right), & \text{если } x_3 < i_3 h_3; \\ \frac{4 \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm} \left(\frac{x_3 - i_3 h_3}{2}\right)\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_{nm} \left(\frac{x_3 + i_3 h_3}{2}\right)\right) - \\ - \frac{4 \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{nm} x_3)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm} \left(\frac{x_3 - i_3 h_3 - h_3}{2}\right)\right) \times \\ \times \operatorname{ch}\left(\gamma_{nm} \left(\frac{2c - x_3 - i_3 h_3 - h_3}{2}\right)\right), & \text{если } h_3 i_3 < x_3 < (i_3 + 1) h_3; \\ \frac{4 \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{nm} \cdot (c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \cdot \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm} \frac{h_3}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_{nm} \left(i_3 h_3 + \frac{h_3}{2}\right)\right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1) h_3; \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{\pi x_1}{a}, X_2 = \frac{\pi x_2}{b}, Y_1 = \frac{\pi y_1}{a}, Y_2 = \frac{\pi y_2}{b}, H_1 = \frac{\pi h_1}{a}, H_2 = \frac{\pi h_2}{b},$$

$$x_1 = j_1 h_1, x_2 = j_2 h_2, y_1 = i_1 h_1, y_2 = i_2 h_2,$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}.$$

Продифференцируем функции G_I^1, G_I^2, G_I^3 и вычислим вторые производные $\frac{\partial^2 G_I^1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 G_I^1}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 G_I^1}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 G_I^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 G_I^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 G_I^2}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 G_I^3}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 G_I^3}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 G_I^3}{\partial x_3^2}$.

Для вторых производных имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_I^1}{\partial x_1^2} &= \frac{-8}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3) \cdot n}{m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \cos(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\ &\times \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right) \cdot \cos(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_I^1}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{-8}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \cos(mX_2) \times \\ &\times \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right) \cdot \cos(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 G_I^1}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{-8}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{-} f_{nm}^0(x_3)}{m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{m}{2}H_2\right) \cdot \cos(nH_1(i_1 + 0,5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right); \\
& \frac{\partial^2 G_I^2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-8}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \cdot \cos(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\
& \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right) \cdot \cos(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right); \\
& \frac{\partial^2 G_I^2}{\partial x_2^2} = \frac{-8}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)m}{n \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \cos(mX_2) \times \\
& \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right) \cdot \cos(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right); \\
& \frac{\partial^2 G_I^2}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{-8}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{-}f_{nm}^0(x_3)}{n \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\
& \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}H_1\right) \cdot \cos(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right); \\
& \frac{\partial^2 G_I^3}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{8}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{-}f_{nm}^1(x_3)}{m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \cos(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\
& \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(n\frac{H_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(m\frac{H_2}{2}\right); \\
& \frac{\partial^2 G_I^3}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{8}{b\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{-}f_{nm}^1(x_3)}{n \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \cos(mX_2) \times \\
& \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(n\frac{H_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(m\frac{H_2}{2}\right); \\
& \frac{\partial^2 G_I^3}{\partial x_3^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d2_{-}f_{nm}^1(x_3)}{n \cdot m \cdot \gamma_{nm}^2} \cdot \sin(nX_1) \cdot \sin(mX_2) \times \\
& \times \sin(nH_1(i_1 + 0,5)) \cdot \sin\left(n\frac{H_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0,5)) \sin\left(m\frac{H_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $d_{-}f_{nm}^0(x_3)$ – значение первой производной по x_3 от функции $f_{nm}^0(x_3)$; $d_{-}f_{nm}^1(x_3)$ – значение первой производной по x_3 от функции $f_{nm}^1(x_3)$; $d2_{-}f_{nm}^1(x_3)$ – значение второй производной по x_3 от функции $f_{nm}^1(x_3)$;

$$\begin{aligned}
 d_{-}f_{nm}^0(x_3) = & \begin{cases} \left(\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} x_3) \right) \left(\frac{-2 \cdot \operatorname{sh} \left(\gamma_{nm} \left(c - i_3 h_3 - \frac{h_3}{2} \right) \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\gamma_{nm} \frac{h_3}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \right), & \text{если } x_3 < i_3 h_3; \\ \\ \frac{\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (x_3 - c - i_3 h_3))}{2 \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} + \frac{\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (x_3 - c + i_3 h_3))}{2 \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} - \\ - \frac{\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} x_3) \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (c - h_3 - i_3 h_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)}, & \text{если } h_3 i_3 < x_3 < (i_3 + 1) h_3; \\ \\ \left(-\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} \cdot (c - x_3)) \right) \left(\frac{2 \cdot \operatorname{sh} \left(\gamma_{nm} \cdot \left(i_3 h_3 + \frac{h_3}{2} \right) \right) \operatorname{sh} \left(\gamma_{nm} \frac{h_3}{2} \right)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1) \cdot h_3; \end{cases} \\
 \\
 d_{-}f_{nm}^1(x_3) = & \begin{cases} \frac{-4 \gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm} x_3) \operatorname{sh} \left(-\gamma_{nm} \frac{h_3}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\gamma_{nm} \left(c - i_3 h_3 - \frac{h_3}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)}, & \text{если } x_3 < i_3 h_3; \\ \\ \frac{\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (i_3 h_3 + c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} - \frac{\gamma_{nm} \operatorname{ch}(\gamma_{nm} (i_3 h_3 - c + x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} - \\ - \gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm} x_3) \left(\frac{2 \operatorname{sh}(\gamma_{nm} (c - i_3 h_3 - h_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \right), & \text{если } h_3 i_3 < x_3 < (i_3 + 1) h_3; \\ \\ -\gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot (c - x_3)) \cdot \left(\frac{4 \cdot \operatorname{sh} \left(\gamma_{nm} \frac{h_3}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\gamma_{nm} \left(i_3 h_3 + \frac{h_3}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} \right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1) h_3; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$d2_{-}f_{nm}^1(x_3) = \begin{cases} \frac{-4\gamma_{nm}^2 \operatorname{ch}(\gamma_{nm}x_3) \operatorname{sh}\left(-\gamma_{nm}\frac{h_3}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_{nm}\left(c - i_3h_3 - \frac{h_3}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)}, & \text{если } x_3 < i_3h_3; \\ \frac{-\gamma_{nm}^2 \operatorname{sh}(\gamma_{nm}(i_3h_3 + c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} - \frac{\gamma_{nm}^2 \operatorname{sh}(\gamma_{nm}(i_3h_3 - c + x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)} - \\ - \frac{2\gamma_{nm}^2 \operatorname{ch}(\gamma_{nm}x_3) \operatorname{sh}(\gamma_{nm}(c - i_3h_3 - h_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)}, & \text{если } h_3i_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3; \\ \frac{4\gamma_{nm}^2 \operatorname{sh}\left(\gamma_{nm}\frac{h_3}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_{nm}\left(i_3h_3 + \frac{h_3}{2}\right)\right) \operatorname{ch}(\gamma_{nm} \cdot (c - x_3))}{\operatorname{sh}(\gamma_{nm} \cdot c)}, & \text{если } x_3 > (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

Уравнение (5) может быть решено различными численными методами. В данной работе был выбран метод коллокации, так как использование метода Галеркина влечет за собой более громоздкие выкладки.

2. Метод коллокации

Для уравнения $A\varphi = f$ ($\varphi, f \in X$) с линейным ограниченным оператором $A: X \rightarrow X$ в гильбертовом пространстве X рассмотрим метод коллокации, который формулируется следующим образом. Приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A \varphi_n = P_n f$. Здесь $\varphi_n \in X_n$ (X_n есть n -мерное подпространство пространства X), $P_n: X \rightarrow X_n$ – оператор проецирования на конечномерное подпространство, который определяется ниже.

Разобьем область Q на элементарные подобласти Q_i с кусочно-гладкими границами ∂Q_i так, чтобы выполнялись условия $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\overline{Q} = \bigcup_i \overline{Q_i}$. Выберем в каждой подобласти Q_i точку (узел) коллокации x^i . Рассмотрим базисные функции:

$$v_i = \begin{cases} 1, & x \in Q_i, \\ 0, & x \notin Q_i. \end{cases}$$

Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций: $X_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации:

$$\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0.$$

Проектор $P_n : X \rightarrow X_n$ определим так: $(P_n \varphi)(x) = \varphi(x^j)$, $x \in Q_i$. Заметим, что при таком определении проектора не определены значения функций $(P_n \varphi)(x)$ при $x \in \partial Q_i$, но это не будет важно, так как в нашем случае $X = L_2$.

Уравнение $P_n A \varphi_n = P_n f$ эквивалентно следующему:

$$(A \varphi_n)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Представим приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$. Подставив это представление в схему метода коллокации, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (A v_k)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь вопрос о построении схемы решения интегрального уравнения методом коллокации [4–7]. Будем формулировать метод для интегродифференциального уравнения (5). Предположим, что тензор $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)$

обратим в $\bar{Q}$, а компоненты тензора $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1}$ являются ограниченными функциями.

Введя обозначения

$$\hat{\xi} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1}, \quad \bar{J} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \bar{E},$$

перейдем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} A \bar{J} \equiv \hat{\xi}(x) \bar{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \bar{J}(y) dy - \\ - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \bar{J}(y) dy = \bar{J}^0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (6)$$

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) J^l(y) dy -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q \hat{G}_E(x, y) \vec{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad l = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Определим компоненты приближенного решения $\vec{J}_n = (J_n^1, J_n^2, J_n^3)$ следующим образом:

$$J_n^1 = \sum_{k=1}^n a_k f_k^1(x), \quad J_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k f_k^2(x), \quad J_n^3 = \sum_{k=1}^n c_k f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции-«ступеньки».

Ниже проводится построение функций f_k^1 . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем Q на элементарные параллелепипеды:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

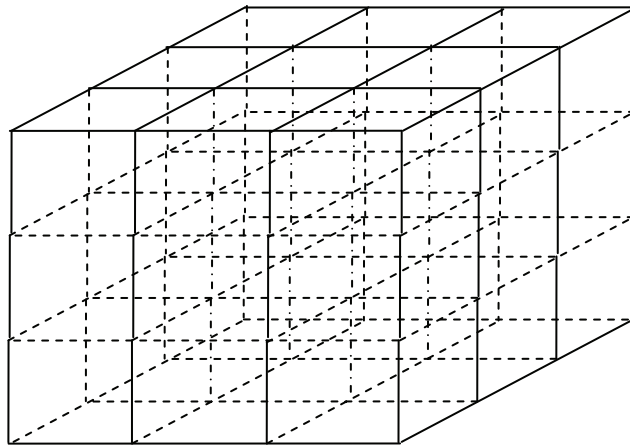
где $k, l, m = 0, \dots, n-1$.

Запишем формулы для f_{klm}^i , $i = 1, 2, 3$:

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в $L_2^3 = L_2 \times L_2 \times L_2$.

Применим метод коллокации для параллелепипеда Q (рис. 1). Для этого произведем последовательный перебор всех точек коллокации для каждого из носителей.



Q

Рис. 1. Тело Q , разбитое на элементарные параллелепипеды Π_{klm}

Используя проинтегрированные компоненты функции Грина G_I^1 , G_I^2 , G_I^3 и значение их вторых производных, вычислим значение матричных элементов. Расширенную матрицу, полученную из метода коллокации, удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right).$$

Элементы B_k и A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i); \quad (8)$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy, \quad (9)$$

где координаты точки коллокации

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad x_{i1} = (i_1 + 0,5)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 0,5)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 0,5)h_3,$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i_1, i_2, i_3, \quad j_1, j_2, j_3 = 0, \dots, n-1.$$

Таким образом, получены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации для решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала. Решая систему линейных алгебраических уравнений для матрицы, составленной с использованием сетки, находим значения поля внутри фигуры. Используя субиерархический метод, можно вычислить значение поля на фигурах сложной формы [8–18]. Численные результаты для данной задачи будут представлены в отдельной статье.

Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.
3. **Смирнов, Ю. Г.** Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 12. – С. 2252–2267.
4. **Васюнин, Д. И.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Д. И. Васюнин, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 71–87.
5. **Медведик, М. Ю.** Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 54–69.

6. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
7. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Миронов // ЖВМиМФ. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1587–1597.
8. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 5–19. – (Естественные науки).
9. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
10. **Антонов, А. В.** Разработка web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий / А. В. Антонов, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 4. – С. 60–67.
11. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 4. – С. 441–446.
12. **Медведик, М. Ю.** Численный метод решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 87–99.
13. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 59–70.
14. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения на плоских экранах произвольной формы / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 48–53.
15. **Медведик, М. Ю.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах заполненных нелинейной средой / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1. – С. 2–13.
16. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации / М. Ю. Медведик, Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
17. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов //

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 44–53.

18. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения на поверхностях произвольной формы / Медведик М. Ю. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3. – С. 88–94.

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

УДК 517.3, 519.6

Медведик, М. Ю.

Метод коллокации для решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле, расположенном в резонаторе /
М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 28–40.